

به نام آنکه جان را حکمت آموخت



طراحی و تحلیل الگوریتم ها

(بخش اول)

Design and Analysis of Algorithms

محمد قدسی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

اسفند ۱۳۸۱

© کلیه حقوق این جزوه متعلق به دکتر محمد قدسی است و تکثیر و توزیع آن بدون اجازه‌ی مؤلف غیر قانونی است.

*از دانش‌جویان عزیز زیر که متن اولیه‌ی این جزوه را از کلاس‌های درس «روش‌های حل مسئله»، «داده‌ساختارها الگوریتم‌ها»، در نیم‌سال‌های اول ۷۵-۷۴ و دوم ۷۷-۷۶ تهیه، تایپ یا حروف‌چینی کردند و بعد از آن در تکمیل بخش‌هایی از آن در درس‌های «ماتری علم کامپیوتر»، «مبانی داده‌ساختارها و الگوریتم‌ها» و «طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها» کمک‌هایی دادند یا پیشنهاد اصلاحی داشتند تشکر می‌شود: طلائع‌فضل، هشام فیلی، علی‌رضا ملک‌زاده، جلال بنایی بروجنی، محمدرضا صلواتی‌پور، محمد مهدیان، افسانه فضل، ابوالفضل هادی اسفنگره، حجت قادری، مسعود اسدپور، سیدعلی اکرمی‌فر، آرش رستگار، محمدرضا صانعی‌پور، روزبه پورنادو، آرش رجاییان، مسلم کاظمی، حبیب رستمی، ناصر عزتی، اختای یلغمی، مهران مهر، سولماز کلاهی، آزاده شاکری، شیوانجاتی، ماسان دشتی‌نژاد و محمدرضا قهرمانی، احسان نوربخش و شهاب کمالی. از وهاب میرزکنی هم به‌خاطر رسم تعدادی از شکل‌های این جزوه و تهیه‌ی بخش «رابطه‌های همگن» تشکر می‌شود.
این جزوه تماماً با استفاده از فارسی‌تک و توسط مؤلف حروف‌چینی شده است. از گروه پروژه‌ی فارسی‌تک که این نرم‌افزار را رایگان در اختیار عموم قرار داده‌اند نیز تشکر می‌نمایم.

فهرست

۱	۱	روش‌های طراحی الگوریتم‌ها
۳	۲	استقرای ریاضی
۱۵	۱.۲	خطاهای معمول در اثبات با استقرا
۱۷	۳	طراحی الگوریتم با استقرا
۱۷	۱.۳	کُد گری
۲۱	۲.۳	رابطه‌ی مستقل از حلقه برای اثبات درستی الگوریتم
۲۲	۳.۳	محاسبه‌ی مقدار یک چندجمله‌ای
۲۳	۴.۳	زیرگراف انقباضی بیشینه
۲۳	۵.۳	نگاشت یک‌به‌یک
۲۴	۶.۳	زیردنباله‌ی متوالی بیشینه
۲۵	۷.۳	مسئله‌ی «ستاره‌ی مشهور»
۲۷	۸.۳	مسئله‌ی «سربازها»
۲۹	۴	روش تقسیم و حل
۲۹	۱.۴	فرش کردن صفحه‌ی شطرنجی

۳۰ زمان‌بندی دوره‌ی بازی‌ها	۲.۴
۳۲ روش حریفانه	۱.۲.۴
۳۵ مدل‌سازی با گراف	۲.۲.۴
۳۶ مسئله‌ی برج‌ها	۳.۴
۳۹ ضرب دو چندجمله‌ای	۴.۴
۴۱ الگوریتم استرامون برای ضرب ماتریس‌ها	۵.۴
۴۳ شبکه‌های مرتب‌ساز	۶.۴
۵۱ روش برنامه‌ریزی پویا	۵
۵۱ ترکیب m از n	۱.۵
۵۵ ویژگی‌ها	۲.۵
۵۵ ضرب ماتریس‌ها	۳.۵
۵۷ راه‌حل پویا	۱.۳.۵
۵۸ مثلث بندی بهینه‌ی یک چندضلعی محدب	۴.۵
۶۱ تعریف ساختار مثلث بندی بهینه (مرحله‌ی اول)	۱.۴.۵
۶۲ تعریف بازگشتی (مرحله‌ی دوم)	۲.۴.۵
۶۲ بزرگ‌ترین زیردنباله‌ی مشترک	۵.۵
۶۳ زیرساختار بهینه	۱.۵.۵
۶۳ راه‌حل بازگشتی	۲.۵.۵
۶۴ راه‌حل پویا	۳.۵.۵
۶۵ ساختن LCS	۴.۵.۵
۶۶ درخت دودویی جست‌وجوی بهینه (Optimal BST)	۶.۵
۷۲ تمرین‌ها	۷.۵
۷۲ مسئله‌ی کوله‌پشتی (Knapsack Problem)	۸.۵

فصل ۱

روش‌های طراحی الگوریتم‌ها

روش‌های طراحی الگوریتم‌ها به منظور حل مسئله‌های مختلف را می‌توان به صورت زیر تقسیم‌بندی کرد:

۱. استقرا^۱

۲. تقسیم و حل^۲

۳. برنامه‌ریزی پویا^۳

۴. حریم‌بندی^۴

۵. جستجوی فضای حالت^۵

روش پس‌گرد^۶ جستجوی فضای حالت را به نظم در می‌آورد. برای محدود کردن فضای جستجو، که اغلب بسیار بزرگ است، از «درخت بازی»^۷، به خصوص هرس $\alpha - \beta$ و نیز روش «انشعاب و تحدید»^۸ استفاده می‌شود. در صورتی که راه‌حل سریع هم بسیار کند باشد، می‌توان از روش‌های تقریبی یا مکاشفه‌ای^۹ استفاده کرد.

induction^۱
divide and conquer^۲
dynamic programming^۳
greedy^۴
state space search^۵
backtracking^۶
game tree^۷
branch and bound^۸
heuristic^۹

فصل ۲

استقرای ریاضی

اثبات حکمی برای حالت کلی n به روش استقرای ساده شامل مرحله‌های زیر است:

پایه استقرای^۱: ثابت می‌کنیم حکم برای $n = 1$ درست است.

فرض استقرای^۲: فرض می‌کنیم حکم برای $n - 1$ درست است.

حکم استقرای^۳: ثابت می‌کنیم حکم برای n درست است.

البته استقرای قوی^۴ هم داریم که در آن در فرض استقرا، فرض می‌کنیم حکم برای $i < n$ درست است. و حکم را برای برای $n = i$ ثابت می‌کنیم. برای مثال:

پایه: حکم برای $n = 1$ و $n = 2$ درست است.

فرض: حکم برای $i > 2$ درست است.

حکم: برای $i + 2$ درست است.

چون ثابت کردیم حکم برای $n = 1$ و $n = 2$ و $n + 2$ درست است پس ثابت می‌شود که برای تمام اعداد طبیعی هم درست است. و در مثالی دیگر،

پایه: برای $n = 1$ درست است.

فرض: برای $n = 2^k$ درست است.

حکم: برای $n = 2^{k+1}$ نیز درست است.

بدین ترتیب ثابت می‌شود که برای کلیه توانهای ۲ درست است.

^۴strong induction

مثال ۱- محاسبه‌ی فرمول

مقدار $T(n)$ را به صورت فرمولی بر حسب n محاسبه کنید:

$$T(n) = 8 + 12 + 18 + 23 + \dots + (3 + 5n)$$

حدس می‌زنیم که $T(n) = c_1 n^2 + c_2 n + c_3$ برای اثبات، ابتدا مقادیر c_1 ، c_2 و c_3 را به دست می‌آوریم و به کمک استقرا ثابت می‌کنیم که این دو رابطه هم‌ارزند.

$$\begin{aligned} T(1) &= 8 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 8 \\ T(2) &= 21 \Rightarrow 4c_1 + 2c_2 + c_3 = 21 \\ T(3) &= 39 \Rightarrow 9c_1 + 3c_2 + c_3 = 39 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{5}{2} \\ c_2 &= \frac{11}{2} \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

یعنی باید ثابت کنیم:

$$T(n) = \frac{5}{2}n^2 + \frac{11}{2}n$$

حال به کمک استقرا حکم بالا را ثابت می‌کنیم.

پایه: $T(1) = 8$

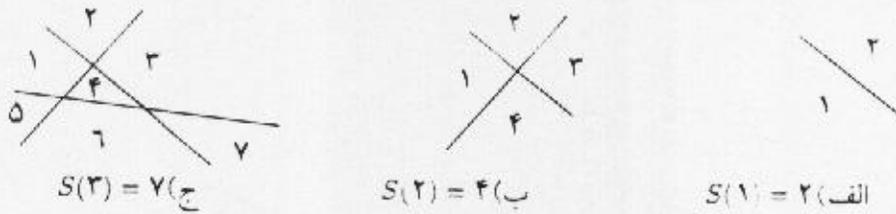
فرض: $T(n-1) = \frac{5}{2}(n-1)^2 + \frac{11}{2}(n-1)$

حکم: $T(n) = \frac{5}{2}n^2 + \frac{11}{2}n$

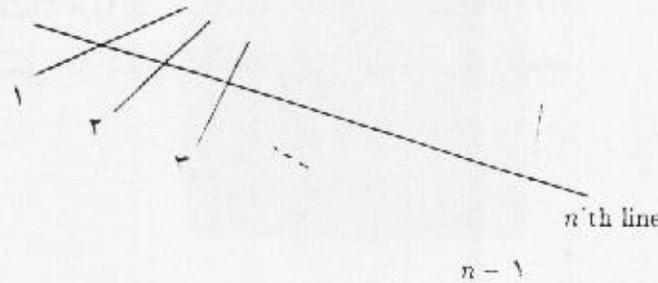
$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3 + 5n \\ &= \frac{5}{2}(n-1)^2 + \frac{11}{2}(n-1) + 3 + 5n \\ &= \frac{5}{2}(n^2 - 2n + 1) + \frac{11}{2}(n-1) + 3 + 5n \\ &= \frac{5}{2}n^2 - 5n + \frac{5}{2} + \frac{11}{2}n - \frac{11}{2} + 3 + 5n \\ &= \frac{5}{2}n^2 + \frac{11}{2}n \end{aligned}$$

مثال ۲- شمارش تعداد ناحیه‌های بین n خط در صفحه

n خط در صفحه‌ای نامتناهی داده شده‌اند. با این فرض که خط‌ها دوبدو ناموازی هستند و همچنین هیچ سه خط در یک نقطه یکدیگر را قطع نمی‌کنند، می‌خواهیم تعداد ناحیه‌های بین n خط را محاسبه کنیم.



شکل ۱.۲: شمارش ناحیه‌های بین خط‌ها در یک صفحه



شکل ۲.۲: تلاقی خط n ام با بقیه خط‌ها.

برای حل می‌توانیم حدس بزنیم که با رسم خط m ام چند ناحیه اضافه می‌شود.

$$S(1) = 2$$

$$S(n) - S(n - 1) = ?$$

فرض می‌کنیم تعداد ناحیه‌های ایجاد شده با $n - 1$ خط $S(n - 1)$ باشد. وقتی خط m ام را رسم می‌کنیم چون موازی با هیچ‌یک از خط‌ها نیست پس هر خط را در یک نقطه قطع می‌کند. روی خط m ام $n - 1$ نقطه‌ی تلاقی با $n - 1$ خط قبلی خواهیم داشت (شکل ۲.۲).

هیچ‌یک از نقاط تلاقی با خط m ام تکراری نیست چون هیچ سه خطی یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند. بنابراین خط m ام به n پاره‌خط تقسیم می‌شود. این پاره‌خط‌ها هر کدام از درون یکی از ناحیه‌های قبلی می‌گذرد و لذا آن ناحیه را به دو ناحیه‌ی جدید تقسیم می‌کند. پس n ناحیه به ناحیه‌هایی که با $n - 1$ خط ایجاد شده‌بود اضافه می‌شود.

$$S(n) = S(n - 1) + n$$

$$S(1) = 2$$

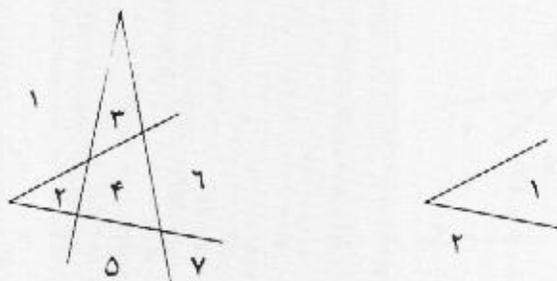
$$S(n) = S(n - 1) + n - 1 + n$$

$$= S(n - 2) + n - 2 + n - 1 + n$$

$$= S(1) + 2 + 3 + \dots + n$$

$$= 2 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$



$$S(2) = 7 \text{ (ب)}$$

$$S(1) = 2 \text{ (الف)}$$

شکل ۳.۲: شمارش ناحیه‌های بین زاویه‌ها در یک صفحه

مثال ۳- شمارش حداکثر تعداد ناحیه‌های بین n زاویه

می‌خواهیم حداکثر تعداد نواحی ایجاد شده با رسم n زاویه (با زاویه‌های دلخواه) در یک صفحه را به دست آوریم.

پایه‌ی استقرا: $D(1) = 2$ بدیهی است.

فرض استقرا: حداکثر تعداد نواحی ایجاد شده با $n-1$ زاویه برابر است با $D(n-1)$. زاویه‌ی n م را چنان رسم می‌کنیم که هر ضلع آن هر دو ضلع تمامی زاویه‌های قبلی را قطع کند. برای این کار راس این زاویه باید در یک ناحیه‌ی خارجی انتخاب شود. یعنی ناحیه‌ای که داخل هیچ زاویه‌ای قرار نداشته باشد. به عنوان مثال ناحیه‌ی ۲ در شکل ۳.۲ الف و ناحیه‌های ۶ و ۷ در شکل ۳.۲ ب خارجی هستند.

حکم استقرا: برای محاسبه‌ی $D(n)$ کافیست مقدار d یعنی تفاضل $D(n)$ و $D(n-1)$ را پیدا کنیم. برای محاسبه‌ی d توجه می‌کنیم که هنگام رسم ضلع اول زاویه‌ی n م تعداد نیم‌خط‌های موجود در صفحه برابر است با $2(n-1)$. پس می‌توانیم حداکثر $2(n-1)$ نقطه‌ی تلافی با خط جدید ایجاد کنیم. در این صورت تعداد ناحیه‌های اضافه شده $1 + 2(n-1)$ خواهد بود. اکنون تعداد نیم‌خط‌های موجود در صفحه برابر است با $2n-1$. بنابراین با رسم دوم ضلع زاویه $2n$ ناحیه‌ی دیگر اضافه می‌شود. اما همان‌طور که در شکل دیده می‌شود به دلیل این که امتداد دو ضلع وجود ندارد، دو ناحیه از مجموع کل ناحیه‌ها کسر می‌شود. در نتیجه داریم $d = 4n - 3$. حال با باز کردن رابطه‌ی بازگشتی، فرمول دلخواه را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
 D(n) &= D(n-1) + 2n - 2 \\
 &= D(n-2) + 2[n + (n-1)] - 2 \cdot 2 \\
 &= D(n-3) + 2[n + (n-1) + (n-2)] - 2 \cdot 3 \\
 &\vdots \\
 &= D(n-i) + 2[n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-i+1)] - i \cdot 2 \\
 &= D(1) + 2[n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] - (n-1) \cdot 2 \\
 &= 2 + 2(n+2)(n-1)/2 - 2(n-1) \\
 &= 2n^2 - n + 1
 \end{aligned}$$

مثال ۴- رنگ کردن ناحیه‌های بین خط‌ها

یک صفحه با n خط در آن داده شده است. حداقل با چند رنگ می‌تواند ناحیه‌های ایجاد شده را رنگ کرد به طوری که هیچ دو ناحیه‌ی مجاورى یک‌رنگ نشوند؟

پایه: اگر یک پاره‌خط داشته باشیم یک طرف آن را با رنگ ۱ و طرف دیگر را با رنگ ۲ رنگ می‌کنیم.

فرض: $n-1$ خط داریم و با دو رنگ ناحیه‌های ایجاد شده‌ی بین آن‌ها را رنگ کرده‌ایم.

حکم: خط n ام را رسم می‌کنیم (این خط می‌تواند با یک یا چند خط موازی باشد). این خط صفحه را به دو قسمت a و b تقسیم می‌کند. این خط نیز از میان تعدادی ناحیه می‌گذرد و هر کدام را به دو ناحیه، یکی در قسمت a و دیگری در قسمت b تقسیم می‌کند. کافی است تا رنگ کلیه‌ی ناحیه‌های یک قسمت، چه جدید و چه قدیم، را به رنگ متضاد آن‌ها تغییر دهیم و رنگ‌های ناحیه‌های قسمت دیگر را تغییر ندهیم. بدیهی است که رنگ‌های ناحیه‌های مجاور در هر قسمت پس از این عمل متضاد خواهند بود (با توجه به فرض استقرا). تنها می‌ماند زوج ناحیه‌های مجاورى که پاره‌خط مشترکشان قسمتی از خط n ام است. این ناحیه‌ها قبلاً یک ناحیه بودند و دارای یک رنگ؛ با تغییر رنگ همه‌ی ناحیه‌های یک قسمت، حتماً رنگ‌های این زوج ناحیه‌ها هم متضاد خواهند بود.

مثال ۵

هرم زیر موجود است:

	1	1
	3 + 5	8
	7 + 9 + 11	27
	13 + 15 + 17 + 19	64
	21 + 23 + 25 + 27 + 29	125
	⋮	
	⋮	
	⋮	

مجموع اعداد سطر i ام را بدست آورید.

$$T(i) = i^3$$

حدس : مجموع اعداد سطر i ام i^3

فرض :

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(i) &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_i \\ T(i+1) &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_i + b_{i+1} \\ b_1 &= a_1 + 2 \\ a_2 &= a_1 + 2 \end{aligned}$$

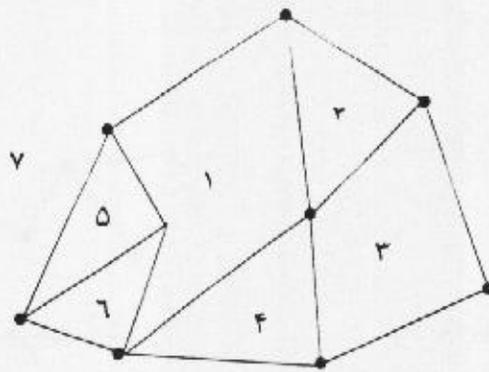
$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= 2i \\ b_2 - a_2 &= 2i \\ &\vdots \\ b_i - a_i &= 2i \end{aligned}$$

$$T(i+1) = T(i) + (2i) \times i + b_{i+1}$$

b_{i+1} برابر با $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + i + 1$ تکامین عدد فرد است، یعنی $k = (i+1)(i+2)/2$ پس:

$$b_{i+1} = 2 \frac{(i+1)(i+2)}{2} - 1 = i^2 + 3i + 1$$

$$\begin{aligned} T(i+1) &= T(i) + 2i^2 + i^2 + 3i + 1 \\ &= i^3 + 3i^2 + 3i + 1 \\ &= (i+1)^3 \end{aligned}$$



شکل ۴.۲: یک گراف مسطح با $V = 9$ ، $E = 14$ ، $F = 7$ داریم: $9 + 7 = 14 + 2$

مثال ۶- فرمول اولر در گراف‌های مسطح و همبند

در ابتدا به تعریف‌های زیر می‌پردازیم:

راس منفرد: راسی که هیچ یالی به آن متصل نباشد.

گراف همبند: گرافی که از هر راس آن به هر راس دیگری لاقط یک مسیر وجود داشته باشد.

گراف مسطح: گرافی که بتوان آن را در صفحه به طوری رسم کرد که یال‌های آن همدیگر را قطع نکنند.

درخت آزاد: گراف همبند بدون جهت و بدون دور.

مسئله- گراف همبند و مسطح با V راس، E اتصال و F ناحیه داده شده است ثابت کنید: $V + F = E + 2$.
(به مثال شکل ۴.۲ توجه کنید.)

استقرا را روی F انجام می‌دهیم:

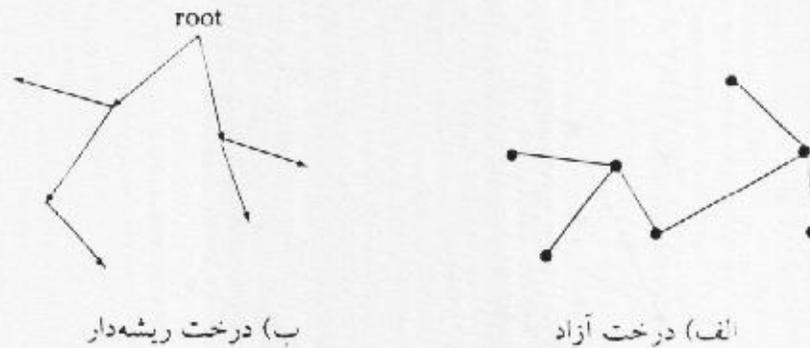
پایه‌ی استقرا: $F = 1$: گراف یک درخت آزاد است.

قضیه ۱. در هر درخت آزاد با V راس و E یال داریم $V = E + 1$.

اثبات. اگر درخت را ریشه‌دار فرض کنیم:

در این صورت به هر راسی، به جز ریشه، یک یال وارد شده است. پس تعداد رأس‌ها یکی بیش از تعداد یال‌هاست. اما برای درخت آزاد در حالت کلی دوباره از استقرا استفاده می‌کنیم (به این کار به اصطلاح استقرای دوبل^۸ گفته می‌شود).

connected graph^۵
planar graph^۶
free tree^۷
double induction^۸



شکل ۲.۲: فرمول اولر برای درخت‌ها.

• روش اول: استقرا روی V' :

پایه‌ی استقرا: $V' = 2, E = 1$ بدیهی است.

فرض استقرا: برای $V' - 1$ رابطه برقرار است.

حکم استقرا: برای V' رابطه برقرار است. حتماً یک رأس با درجه‌ی ۱ وجود دارد زیرا در غیر این صورت دور ایجاد می‌شود. این رأس و یال متصل به آن را حذف می‌کنیم. طبق فرض استقرا در گراف حاصل رابطه‌ی $V' - 1 = (E - 1) + 1$ برقرار است. با افزودن یک واحد به طرفین معادله داریم: $V' = E + 1$

• روش دوم: استقرا روی E :

پایه‌ی استقرا: $V' = 1, E = 0$ بدیهی است.

فرض استقرا: برای $E' < E$ رابطه برقرار است. (توجه شود در این جا از استقرا قوی استفاده می‌کنیم.) حکم استقرا: برای E رابطه برقرار می‌باشد. یک یال دلخواه را حذف می‌کنیم با توجه به این که در درخت دور وجود ندارد هیچ مسیر دیگری بین دو رأس دو سر این یال وجود نخواهد داشت. بنابراین درخت به دو درخت با تعداد یال‌های کمتر تجزیه می‌شود. فرض کنید تعداد رأس‌ها و یال‌های این دو درخت به ترتیب V_1, V_2, E_1 و E_2 باشد.

طبق فرض استقرا داریم: $V_1 = E_1 + 1$ و $V_2 = E_2 + 1$. از جمع این دو رابطه داریم:

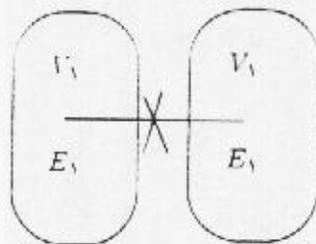
$V_1 + V_2 = (E_1 + E_2 + 1) + 1$ که با در نظر داشتن یال حذف شده به دست می‌آوریم:

$$\boxed{V' = E + 1}$$

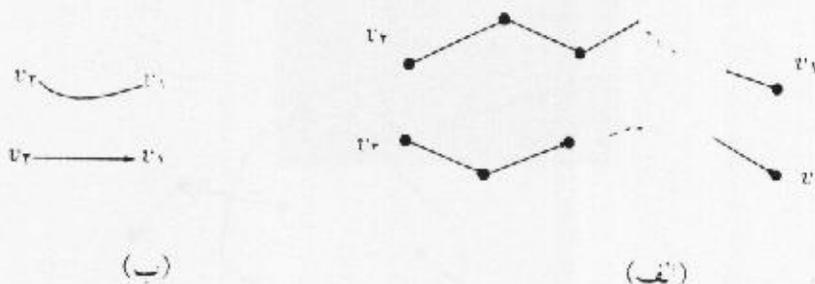
بنابراین حکم برای $F = 1$ ثابت شده است. □

فرض استقرای مساله‌ی اصلی: رابطه برای $F - 1$ برقرار است.

حکم استقرا: رابطه برای F نیز برقرار می‌باشد.



شکل ۶.۲: اثبات فرمول اولر برای درخت آزاد.



شکل ۷.۲: v_1 و v_2 مجاور هم هستند.

یک ناحیه وجود دارد که همسایه‌ی ناحیه‌ی خارجی است. این ناحیه در داخل یک دور محاط شده است. حال یک یال که مرز این ناحیه و ناحیه‌ی خارجی باشد را حذف می‌کنیم. از آنجا که این یال از یک دور حذف شده گراف حاصل هم‌چنان همبند باقی خواهد ماند. با انجام عمل فوق ناحیه‌ی مزبور در ناحیه‌ی خارجی ادغام می‌شود. پس طبق فرض استقرا در این گراف جدید داریم: $2 + (E - 1) = (F - 1) + V$. با افزودن یک واحد به طرفین معادله‌ی فوق به دست می‌آوریم: $2 + F = E + V$ و حکم ثابت است.

مثال ۷- مجموعه‌ی مستقل در گراف‌ها

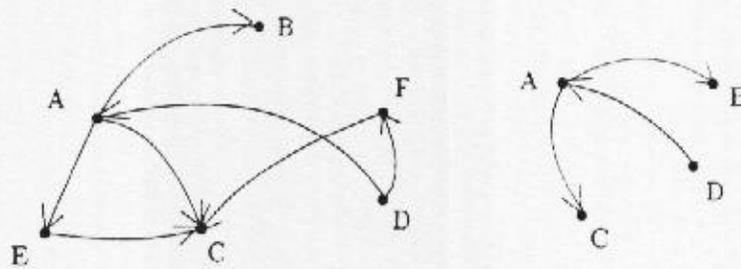
در ابتدا به تعریف‌های زیر می‌پردازیم:

دسترسی^{۱)}: رأس v_1 توسط رأس v_2 قابل دسترسی است اگر مسیری از v_2 به v_1 وجود داشته باشد.

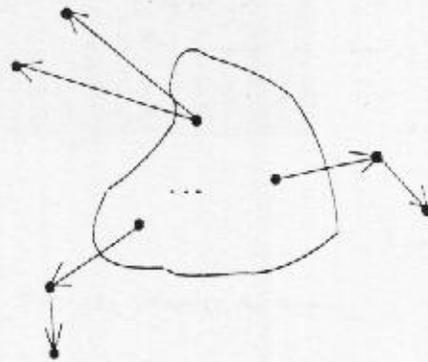
مجاورت^{۲)}: رأس v_1 مجاور رأس v_2 است اگر یالی از v_2 به v_1 موجود باشد. توجه کنید که روابط فوق در یک گراف بدون جهت خاصیت تقارنی دارند (شکل ۷.۲).

زیرگراف القایی^{۳)}: در گراف $G = (V, E)$ زیرگراف القایی G_1 با مجموعه‌ی رأس‌های H گرافی است که مجموعه‌ی رأس‌های آن H و مجموعه‌ی یال‌های آن $H \times H \cap E(g)$ است. یعنی همه‌ی یال‌هایی از G که دو سرشان در H است (شکل ۸.۲).

^{۱)} reachability
^{۲)} adjacency
^{۳)} induced subgraph



شکل ۸.۲. زیرگراف القایی G_1 با مجموعه‌ی رأس‌های $\{A, B, C, D\}$ از گراف G



شکل ۹.۲: مجموعه‌ی مستقل

مجموعه‌ی مستقل 1^2 در یک گراف: در گراف $G = (V, E)$ زیرمجموعه‌ای از V مثل H یک مجموعه‌ی مستقل است اگر هیچ دو رأس موجود در H با هم مجاور نباشند. به عنوان مثال مجموعه‌ی $\{B, E, F\}$ در شکل ۸.۲ یک مجموعه‌ی مستقل است.

مجموعه‌ی همسایگی 1^3 : در گراف $G = (V, E)$ مجموعه‌ی همسایگی یک رأس مثل v به صورت زیر تعریف می‌شود:

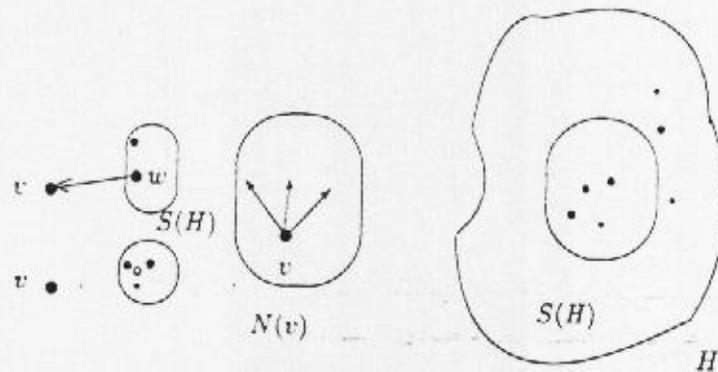
$$N(v) = \{v\} \cup \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$$

یعنی مجموعه‌ای شامل خود v و تمام رأس‌های مجاورش.

قضیه ۲. برای هر گراف جهت دار $G = (V, E)$ یک مجموعه‌ی مستقل $S(G)$ وجود دارد که هر رأس گراف از یکی از رأس‌های این مجموعه‌ی مستقل با مسیری به طول حداکثر ۲ قابل دسترسی است.

اثبات. بر روی n (تعداد رأس‌ها) استقرا انجام می‌دهیم.

¹² independent set
¹³ neighborhood



شکل ۱۰.۲: اثبات قضیه.

پایه استقرا: برای $n \leq 3$ بدیهی است.

فرض استقرا: برای $n' < n$ قضیه درست است. (از استقرای قوی استفاده می‌کنیم.)

حکم استقرا: برای n نیز درست است.

راس v و زیرگراف القایی H با مجموعه‌ی رأس‌های $V - N(v)$ را در نظر بگیرید. طبق فرض استقرا H دارای مجموعه‌ی مستقلی مثل $S(H)$ است که خاصیت مطلوب را دارا می‌باشد. حالا دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول - راس v مجاور یکی از رأس‌های $S(H)$ مثل w است:

در این صورت همان مجموعه‌ی $S(H)$ جواب است ($S(G) = S(H)$). زیرا همه‌ی رأس‌های موجود در $N(v)$ از w با مسیری به طول حداکثر ۲ قابل دسترسی هستند.

حالت دوم - راس v مجاور هیچ کدام از رأس‌های $S(H)$ نیست:

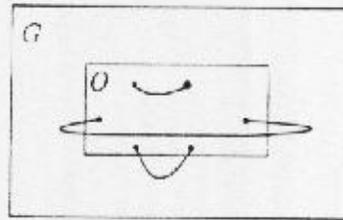
در این صورت با توجه به این که هیچ یک از رأس‌های $S(H)$ نیز مجاور v نیست می‌توان v را به $S(H)$ اضافه کرد و مجموعه‌ی حاصل هم‌چنان مستقل خواهد بود. و مابقی رأس‌های موجود در $N(v)$ اکنون از v با مسیری به طول ۱ قابل دسترسی خواهند بود. بنابراین $S(G) = S(H) \cup \{v\}$ مجموعه‌ی خواسته شده است.

برای مثال در شکل ۸.۲ می‌توانیم $S(G)$ را برابر مجموعه‌ی D بگیریم.

□

یک مسئله با استفاده از قضیه‌ی فوق

الگوریتمی بنویسید که گره‌هایی را در یک گراف داده شده رنگ کند به طوری که هیچ یک مجاور دیگری نبوده و فاصله‌ی هر گره گراف از یکی از آن‌ها کمتر از ۳ باشد.



شکل ۱۱.۲: مسیرهای مستقل یالی.

روش حل: یک گرهی دلخواه را در نظر گرفته و آن گره و کلیه‌ی رأس‌های مجاورش را از گراف حذف می‌کنیم. به صورت بازگشتی مسئله را برای گراف کوچکتر حاصل حل می‌کنیم. ختمه بازگشت وقتی است که تعداد رأس‌ها کمتر از ۴ شود. حال اگر گرهی حذف شده مجاور هیچ یک از رأس‌های گراف جدید نباشد آن را نیز رنگ می‌کنیم. گراف را می‌توان به عنوان یک شهر و رأس‌های رنگ شده را به عنوان مراکز آتش نشانی در نظر گرفت.

مثال ۸- مسیرهای مستقل یالی

تعریف مسیرهای مستقل یالی^{۱*}: دو مسیر در یک گراف مستقل یالی هستند اگر دارای یال مشترک نباشند.

قضیه ۳. در گراف $G = (V, E)$ فرض کنید O مجموعه‌ی رأس‌های با درجه‌ی فرد باشد. O را می‌توان به زوج‌راس‌هایی تبدیل کرد که مسیرهای بین این زوج‌راس‌ها مستقل یالی باشند.

شکل ۱۱.۲ مثالی از این قضیه است.

اثبات. در مجموعه‌ی فوق (O) رابطه‌ی زیر برقرار است:

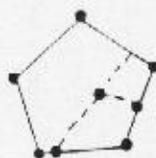
$$|O| = 2k$$

ابتدا رابطه‌ی فوق را اثبات می‌کنیم. می‌دانیم که $\sum_{v_i \in V} \deg(v_i)$ یک عدد زوج است چون برای هر یال موجود در گراف، دو درجه به این مجموع اضافه می‌کند. از طرف دیگر هر رأس موجود در مجموعه‌ی $V - O$ از درجه‌ی زوج است بنابراین $\sum_{w_i \in V-O} \deg(w_i)$ عدد زوجی است. چون:

$$\sum_{v_i \in V} \deg(v_i) = \sum_{w_i \in V-O} \deg(w_i) + \sum_{u_i \in O} \deg(u_i)$$

چون برای هر $(u_i \in O)$ ، $\deg(u_i)$ عدد فردی است بنابراین تعداد u_i ها باید زوج باشد یعنی رابطه‌ی فوق الذکر صحیح است.

^{۱*} Edge Disjoint



شکل ۱.۲.۲: اثبات غلط قضیه‌ی اولر.

حال با استقرا روی تعداد یال‌ها قضیه را ثابت می‌کنیم: ابتدا فرض می‌کنیم که گراف همبند نیست. بنابراین گراف مورد نظر ما به چند گراف همبند کوچکتر تقسیم می‌شود که برای هر گراف همبند قضیه صادق است (بنا به فرض استقرا). بنابراین برای کل گراف نیز صحیح است.

حال گراف G را در نظر بگیرید که v و w دو عضو O باشند و همبند باشند مسیری از v به w وجود دارد که با حذف این مسیر ممکن است G به یک گراف غیر همبند تبدیل شود که در آن گراف مجموعه‌ی رئوس با درجه‌ی فرد برابر است با: $O = \{v, w\}$ که با فرض استقرا قضیه برای این گراف صادق است. در غیر این صورت یا حذف این مسیر گراف همبند می‌ماند یعنی برای هر دو رأس مسیری بین آن دو هست که باز می‌توان عمل فوق را تکرار کرد. \square

۱.۲ خطاهای معمول در اثبات با استقرا

به چند نوع خطاهایی که ممکن است در استفاده از استقرا ایجاد شود توجه کنید:

۱. در اثبات فرمول اولر $(V + F = E + 2)$ شخصی این قضیه را این چنین اثبات می‌کند:
اثبات به طریقه استقرا: یک وجه داریم، از وسط یک یال به وسط یال دیگری یک یال وصل می‌کنیم (شکل ۱.۲.۲)

V دو واحد اضافه شده.

F یک واحد اضافه شده، و

E سه واحد اضافه شده است.

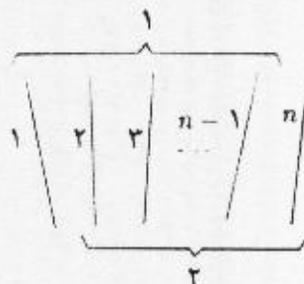
پس رابطه‌ی مزبور صحیح است.

اشکال این اثبات در این جاست که اگر از پایه‌ی استقرا شروع کنیم و با استفاده از حکم مرحله به مرحله گراف را بزرگتر کنیم، ممکن است گراف داده شده تولید نشود، چرا که رأسی که اضافه می‌شود همیشه از درجه‌ی فرد است.

۲. n خط در صفحه داریم ثابت می‌کنیم که همگی از یک نقطه می‌گذرند.

اثبات به طریقه استقرا:

پایه: برای $n = 2$ مشنه صحیح است.



شکل ۱۳.۲: اثبات غلط با استقرا.

فرض: برای $n - 1$ خط مسئله صحیح است.

حکم: برای n خط مسئله صحیح است.

مطابق شکل ۱۳.۲، $n - 1$ خط شماره‌ی I بنا به فرض از یک نقطه می‌گذرند. $n - 1$ خط شماره‌ی II هم بنا به فرض از یک نقطه می‌گذرند. این دو نقطه باید یکی باشند چون بین دو دسته خط شامل خط‌های مشترکند. بنابراین کل n خط از یک نقطه می‌گذرند.

اشکال اثبات در پایه‌ی استقرا است، پایه باید $n = 3$ باشد، نه $n = 2$ و برای $n = 3$ پایه درست نیست!

۳. ثابت کنید که

$$n = \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1 + (n)\sqrt{1 + \dots}}}$$

اثبات به وسیله‌ی استقرا:

پایه: برای $n = 1$ مسئله صحیح است.

طرفین فرمول فوق را به توان دو می‌رسانیم، داریم:

$$n^2 - 1 = (n-1)\sqrt{1 + (n)\sqrt{\dots}} \Rightarrow n + 1 = \sqrt{1 + (n)\sqrt{\dots}}$$

که همان فرمول فوق برای $n + 1$ است و مسئله اثبات شده است.

اشکال اثبات در این جااست که ما بر $n - 1$ تقسیم کرده‌ایم درحالی که پایه‌ی استقرا $n = 1$ است! یعنی که در همان مرحله‌ی اول ما بر صفر تقسیم کرده‌ایم که اشکال دارد.